

ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA

4

1^a
SÉRIE



Ensino Médio

Secretaria de
Educação



GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO



/SeeducRJ



/seeducrj



/seeducrj

Secretaria de
Educação



GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação

Comte Bittencourt
Secretário de Estado de Educação

Andrea Marinho de Souza Franco
Subsecretária de Gestão de Ensino

Elizângela Lima
Superintendente Pedagógica

Maria Claudia Chantre
Coordenadoria de Áreas de conhecimento

Assistentes

Carla Lopes
Cátia Batista
Roberto Farias

Texto e conteúdo

Prof. Evaldo de Lima
C.E. Pastor Miranda Pinto
Prof.^a Fátima Cristina R. dos S. Magalhães
C.E. João Proença
Prof. Herivelto Nunes Paiva
C.E. Pandiá Calógeras
Prof. Jonas da Conceição Ricardo
CIEP 394 Cândido Augusto Ribeiro Neto
Prof. Lucas José Ribeiro
C.E. Professor José Accioli
Prof. Luciano Silva Terencio de Jesus
CEJA Petrópolis
Prof.^a Mônica de Siqueira da Cunha
C.E. Pastor Miranda Pinto

Capa

Luciano Cunha

Revisão de texto

Prof^a Andreia Cristina Jacurú Belletti

Prof^a Andreza Amorim de Oliveira Pacheco.

Prof^a Cristiane Ramos da Costa

Prof^a Deolinda da Paz Gadelha

Prof^a Elizabete Costa Malheiros

Prof^a Karla Menezes Lopes Niels

Prof^a Kassia Fernandes da Cunha

Prof Marcos Giacometti

Prof Mário Matias de Andrade Júnior

Prof Paulo Roberto Ferrari Freitas

Prof^a Regina Simões Alves

Prof. Sammy Cardozo Dias

Prof Thiago Serpa Gomes da Rocha

Esse documento é uma curadoria de materiais que estão disponíveis na internet, somados à experiência autoral dos professores, sob a intenção de sistematizar conteúdos na forma de uma orientação de estudos.

© 2021 - Secretaria de Estado de Educação. Todos os direitos reservados.

Matemática – Orientações de Estudos

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	6
2	Aula 1- Ciclo Trigonométrico	6
3	Aula 2- Função exponencial	10
4	Aula 3- Tipos de função exponencial e gráfico da função exponencial	12
5	Aula 4: Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.	14
6	Aula 5: Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.	15
7	Atividades	20
8	Resumo	21
9	Referências Audiovisuais	22
10	Referências Bibliográficas	22

ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS PARA MATEMÁTICA
4º Bimestre de 2020 - 1ª série do Ensino Médio

META:

Apresentar os conceitos do Ciclo trigonométrico para as funções seno, cosseno e tangente, assim como resolver equações trigonométricas simples na 1ª volta e identificar e construir gráficos para as funções trigonométricas. Identificar a função exponencial, resolver problemas e traçar seus gráficos.

OBJETIVOS:

Ao final destas Orientações de Estudos, você deverá ser capaz de:

1. Reconhecer um Ciclo Trigonométrico, para as funções seno, cosseno e tangente;
2. Resolver equações exponenciais simples
3. Construir gráficos de funções exponenciais
4. Resolver equações trigonométricas
5. Identificar e traçar gráficos trigonométricos

INTRODUÇÃO

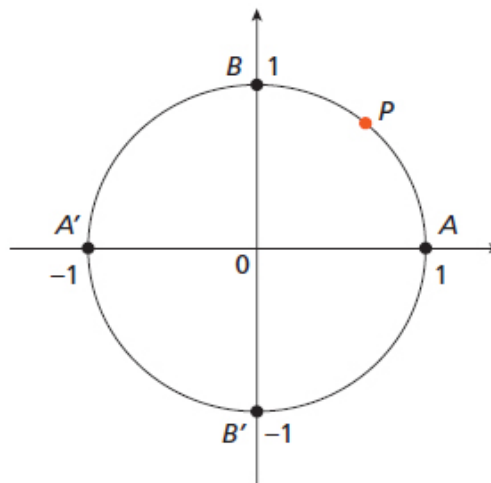
A trigonometria, é uma parte da matemática bem temida por não ser compreendida facilmente. Hoje o objetivo desta OE, é modificar estes rótulos dados a ela, de forma muito injusta. Ainda sobre a trigonometria, esta é aplicada em diversas áreas do conhecimento, inclusive por música.

Aprenderemos que a trigonometria não se resume apenas ao ciclo trigonométrico, ela está inclusive nas frequências musicais no que tange seu formato. Abordaremos os conteúdos relacionados as funções trigonométricas, as equações e seus gráficos de cosenóide, tangente e senóide.

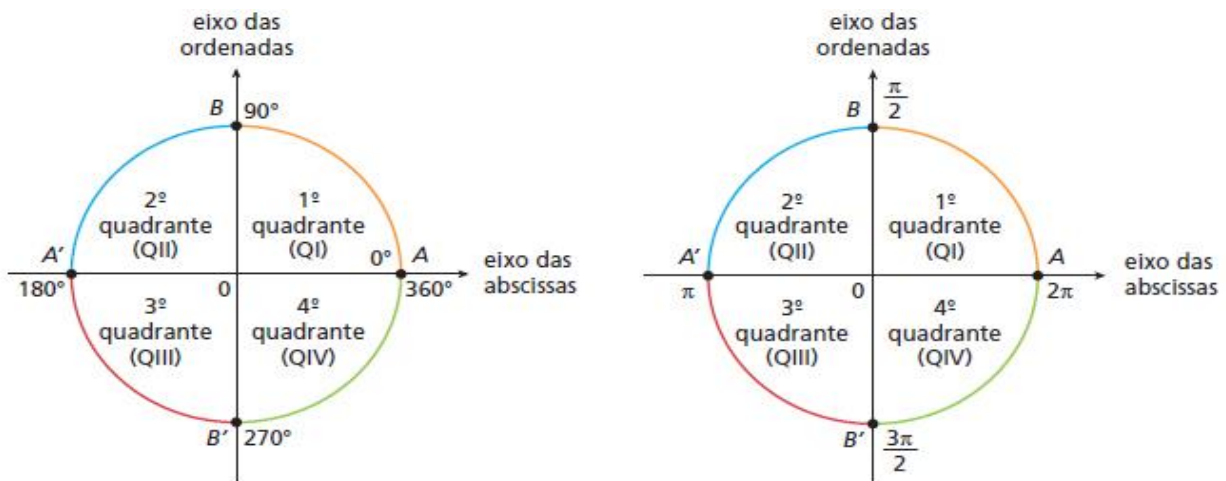
Faremos também um retorno até as potências, pois sem elas não poderemos estudar as funções exponenciais, compreender a confecção de gráficos e as suas classificações.

2. Aula 1- Ciclo Trigonométrico

Olá, nas aulas anteriores aprendemos que o ciclo trigonométrico tem centro na origem $O(0,0)$ de um plano cartesiano, com 1 unidade de raio. O plano cartesiano divide o ciclo trigonométrico em quatro partes semelhantes, chamadas de quadrantes iniciado a partir de AO .



Como descrito acima os quadrantes, como mostram as imagens a seguir:



Note que seus valores podem estar expressos em graus ou em radianos.

Exemplos

- a) O arco de 51° é um arco do 1º quadrante
- b) O arco de 120° é um arco do 2º quadrante
- c) O arco de 180° não pertence a nenhum quadrante, e sim ao eixo X
- d) O arco de 201° é um arco do 3º quadrante
- e) O arco de 345° é um arco do 4º quadrante
- f) O arco de 270° não pertence a nenhum quadrante, e sim ao eixo Y

1.1- Simetria no Ciclo Trigonométrico: Redução ao primeiro quadrante através da congruência entre ângulos:

Para sabermos qual o quadrante que os ângulos ocupam, devemos determinar a congruência entre os ângulos. Para isso basta aplicarmos as relações a seguir::

a) Do 1º quadrante até o 2º quadrante = $180^\circ - x$

b) Do 1º quadrante até o 3º quadrante = $180^\circ + x$

c) Do 1º quadrante até o 4º quadrante = $360^\circ - x$

Onde x é o ângulo do 1º quadrante que será levado em consideração

Exemplos:

1) Determinar os ângulos congruentes a 45° , em todos os quadrantes.

a) 2º Quadrante = $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

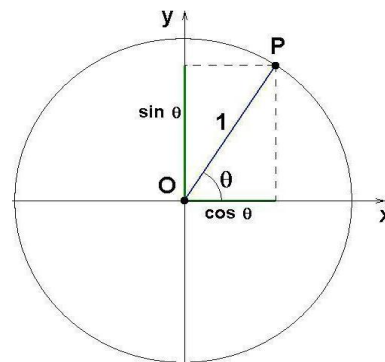
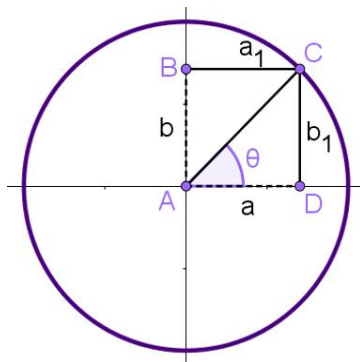
b) 3º Quadrante = $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

c) 4º Quadrante = $360^\circ - 45^\circ = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

1.2- Seno, Cosseno e Tangente no Ciclo Trigonométrico

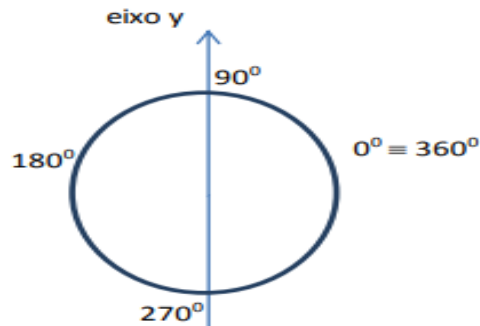
- Seno e Cosseno

Agora observe que no **círculo trigonométrico**, é possível determinar os valores de **seno** e de **cosseno** de um ângulo θ qualquer. Por isso, é importante construir esse ângulo no círculo trigonométrico, como demonstrado abaixo.



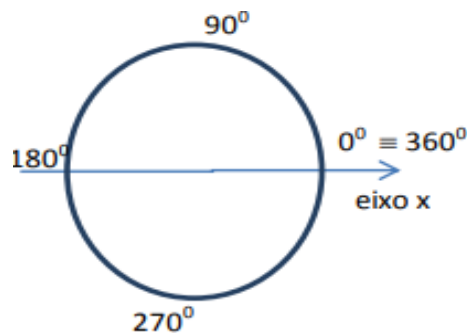
Obs.: Não esqueça que o eixo x (abscissas), representa o cosseno e o eixo y (ordenadas), representa o seno.

- Para o eixo Y (Seno) – Posição: Vertical (em pé)



Note que para os valores de 0° , 180° e 360° não tem representação no eixo dos senos (Y). Assim, os valores de seno somente existirão para 90° e 270° , pois pertencem ao eixo y.

- Para o eixo X (Cosseno) – Posição: Horizontal (deitado)



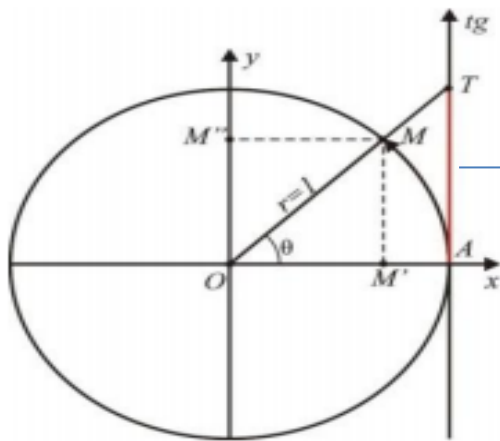
Repare que os valores de 90° e 270° não tem representação no eixo dos cossenos. Assim, os valores de cosseno somente existirão para 0° , 180° e 360° , pois pertencem ao eixo x (abscissas).

Abaixo temos os valores dos ângulos que pertencem aos eixos x e y, para seno e cosseno, vejamos:

	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	-1	0
Cosseno	1	0	-1	0	1

- Tangente

Vamos falar agora sobre a tangente e a sua definição no círculo trigonométrico. Observe o círculo abaixo, definiremos para o mesmo raio unitário, $r = 1$, citado acima para o seno e para o cosseno. Observe que o ponto T é ponto de encontro com a reta OM no eixo das tangentes (reta vertical ao eixo x ou também chamada de perpendicular, pois passa pelo ponto A)



A tangente de α é a ordenada do ponto T.

Perceba que o arco AM está no ciclo trigonométrico, de medida α rad, definido com $0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ rad}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$. Onde T o ponto de encontro da reta OM com a reta perpendicular (vertical) ao eixo das abscissas, passando pelo ponto A.

3. Aula 2- Função exponencial

Olá pessoal, nesta aula vamos estudar sobre função exponencial, mas para ajudar, é preciso revermos rapidamente um pouco de potenciação.

Vamos aos exemplos:

- 1) $3^0 = 1$
- 2) $3^1 = 3$
- 3) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- 4) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
- 5) $6^{-1} = \frac{1}{6}$
- 6) $7^{-2} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{49}$

Obs.1) Não se esqueçam de que todo número elevado a zero dará sempre 1. Ex. $3^0=1$ e $409^0=1$

Obs.2) Todo o número elevado a 1 resultará no próprio número. Ex. $600^1= 600$ e $7^1=7$

Obs.3) Zero elevado a zero dará 1, por definição citada acima. $0^0= 1$

Em resumo, a operação envolvida na potenciação é a multiplicação, e a base se repete exatamente na quantidade de vezes que o expoente indicar. Mas afinal, quem é quem?

Ex.

$$\begin{array}{c} \text{expoente} \\ 5^3 = 125 \\ \text{base} \qquad \text{potência} \end{array}$$

Agora que já relembramos um pouco de potenciação, vamos dar início as funções exponenciais.

Uma função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é chamada de função exponencial de base **a** quando existe um número real **a**, com $a > 0$ e $a \neq 1$, onde $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ($\forall$ para todo).

Exemplos de Funções Exponenciais:

- a) $f(x) = 4^x$
- b) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
- c) $h(x) = (0,5)^x$
- d) $p(x) = (\sqrt{7})^x$

Propriedades da função exponencial

1ª propriedade: se $x = 0$, logo $f(x) = 1$

2ª propriedade: se $a > 1$, a função será crescente

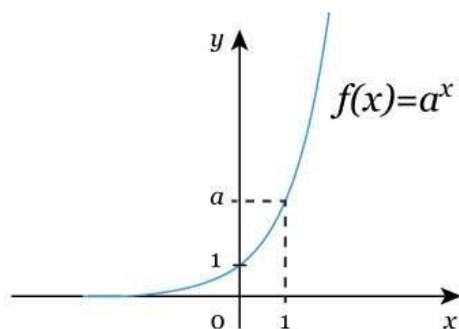
3ª propriedade: se $0 < a < 1$, a função será decrescente

4ª propriedade: sempre que $x_1 = x_2$, $a^{x_1} = a^{x_2}$

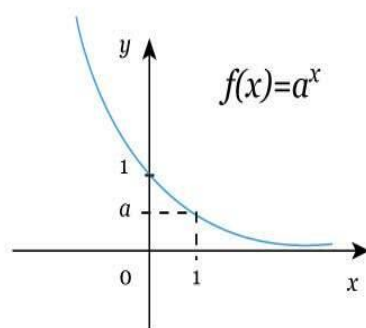
4. Aula 3 - Tipos de função exponencial e gráfico da função exponencial

Temos dois tipos de funções exponenciais, elas podem ser, crescente ou decrescente, da mesma forma que seus gráficos são crescentes ou decrescentes.

O gráfico da função $f(x) = a^x$, é crescente quando a base a é um número maior do que 1, ou seja, quando $a > 1$.



O gráfico da função $f(x) = a^x$, é decrescente quando a base a é um número maior que 0 e menor que 1, ou seja, quando $0 < a < 1$.

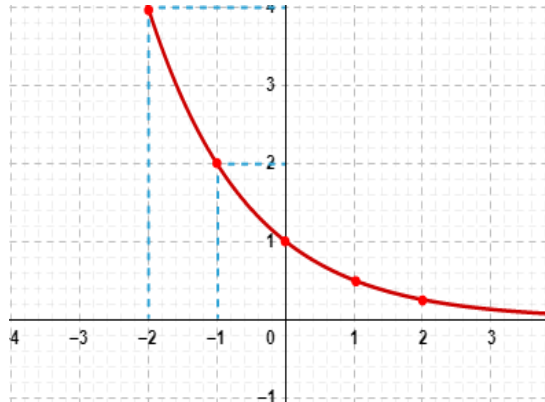


Exemplos de construção de gráficos de funções exponenciais.

1º) Seja a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, construa o gráfico para esta função.

Resolução: Vamos associar valores a variável x e ver como a função ficará. Observe a seguinte tabela e os seus valores resultantes:

x	$f(x) = (1/2)^x$
-2	$(1/2)^{-2} = 4$
-1	$(1/2)^{-1} = 2$
0	$(1/2)^0 = 1$
1	$(1/2)^1 = 1/2$
2	$(1/2)^2 = 1/4$



Como $0 < a < 1$, (pois $1/2 = 0,5$, que é menor que 1), então temos que: $f(x) = (1/2)^x$, é uma função decrescente. Outros exemplos de funções decrescentes:

a) $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

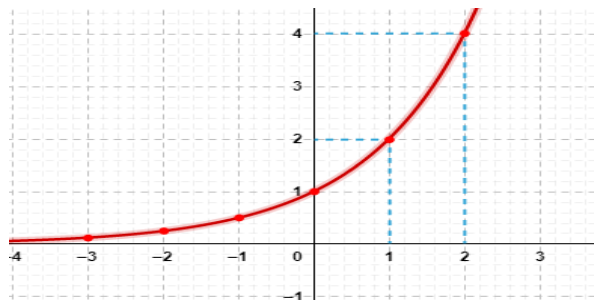
b) $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2º) Seja a função $f(x) = 2^x$, construa o gráfico para a função.

Resolução:

Como desenvolvido na função anterior, vamos substituir valores a variável x e ver a função e seu gráfico.

x	$f(x) = 2^x$
-2	$2^{-2} = (1/2)^2 = 1/4$
-1	$2^{-1} = 1/2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$



Como $a > 1$, então temos que $f(x) = 2^x$ é uma função crescente. Outros exemplos de funções crescentes:

a) $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

b) $g(x) = (\sqrt{1,01})^x$

5. Aula 4 - Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.

Olá, que bom que você voltou! Hoje vamos aprender a resolver equações trigonométricas. Por isso iniciaremos aprendendo a relação fundamental da trigonometria (1ª RFT), no ciclo trigonométrico.

A 1ª Relação Fundamental Trigonométrica, também chamada de 1ª RFT, relaciona duas funções trigonométricas bastante conhecidas, a função seno e a função cosseno.

Relação Fundamental Trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Atividades Resolvidas

1) Determine o $\operatorname{sen} x$, sendo que o $\cos x = \frac{2}{5}$, com $x \in [0; \pi/2]$

Solução: Aplicando na Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \frac{4}{25} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = 1 - \frac{4}{25}$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{21}{25} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{21}{25}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como o intervalo está definido para o 1º quadrante vamos considerar sen positivo.

2) Qual será o valor de X , sendo este $X = \operatorname{sen} 30^\circ - \cos 60^\circ - \operatorname{tag} 45^\circ$?

Solução:

$$X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 1$$

6. Aula 5 – Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

No estudo dos gráficos nos deparamos com imagens formadas por ondas do mar, frequência de músicas entre outras, que podem nos remeter a situações de nosso dia-a-dia. Os gráficos de funções trigonométricas têm formatos lindos, inclusive lembrados em músicas, como por exemplo “Como uma onda no mar” de Lulu Santos.



Fonte: encurtador.com.br/evB79

As **funções trigonométricas** são classificadas como funções periódicas, ou seja, na sua representação gráfica, elas se caracterizam pela repetição de um padrão, como vemos na imagem acima. A este padrão chamamos de período. Leia a definição formal de função periódica a seguir:

Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de periódica se existir um número $k > 0$ onde o menor valor de k que satisfaz a condição abaixo é chamado de período: $f(x+k) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ ($\forall$ = significa para todo)

Considerando que as funções trigonométricas têm sua representação no ciclo trigonométrico, os períodos para cada função vão estar limitados à cada ciclo completo.

Função seno

A função seno será definida como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde: $f(x) = \text{sen } x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
O seu gráfico é classificado como **senóide**.

Representação da tabela e do gráfico, de uma função seno considerando os valores pertencentes aos eixos x e y.

X	$f(x) = \text{sen } x$	$f(x)$
0°	$f(0) = \text{sen}0^\circ = 0$	0
90° ou $\frac{\pi}{2}$	$f(1) = \text{sen}90^\circ = 1$	1
180° ou π	$f(1) = \text{sen}180^\circ = 0$	0
270° ou $\frac{3\pi}{2}$	$f(1) = \text{sen}270^\circ = -1$	-1
360° ou 2π	$f(1) = \text{sen}360^\circ = 0$	0

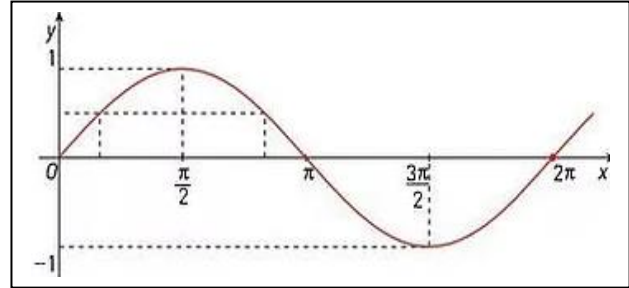
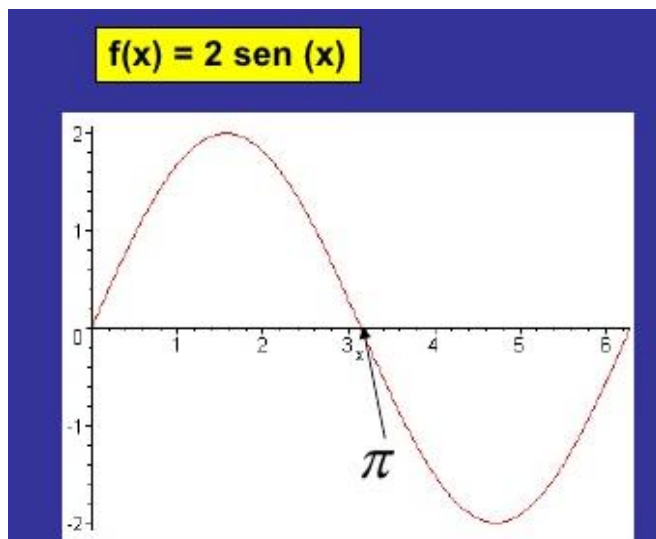


Imagem: A imagem da função seno é no max 1 e no min -1, ou seja, é o intervalo $[-1, 1]$.

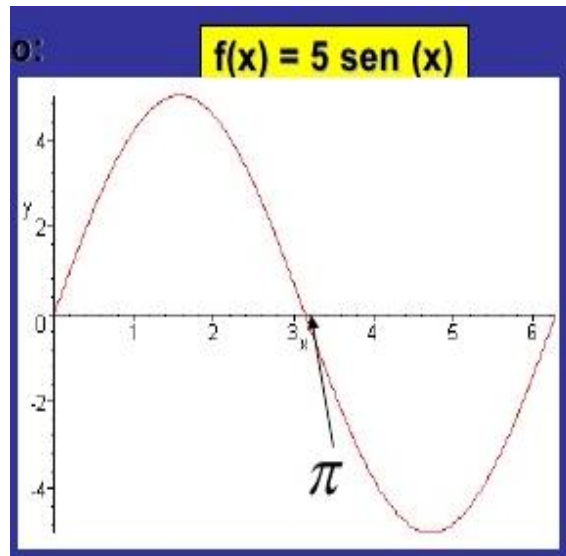
Período: O período da função seno é 2π

Exemplos de funções seno e suas representações gráficas.

1)



2)



Função cosseno

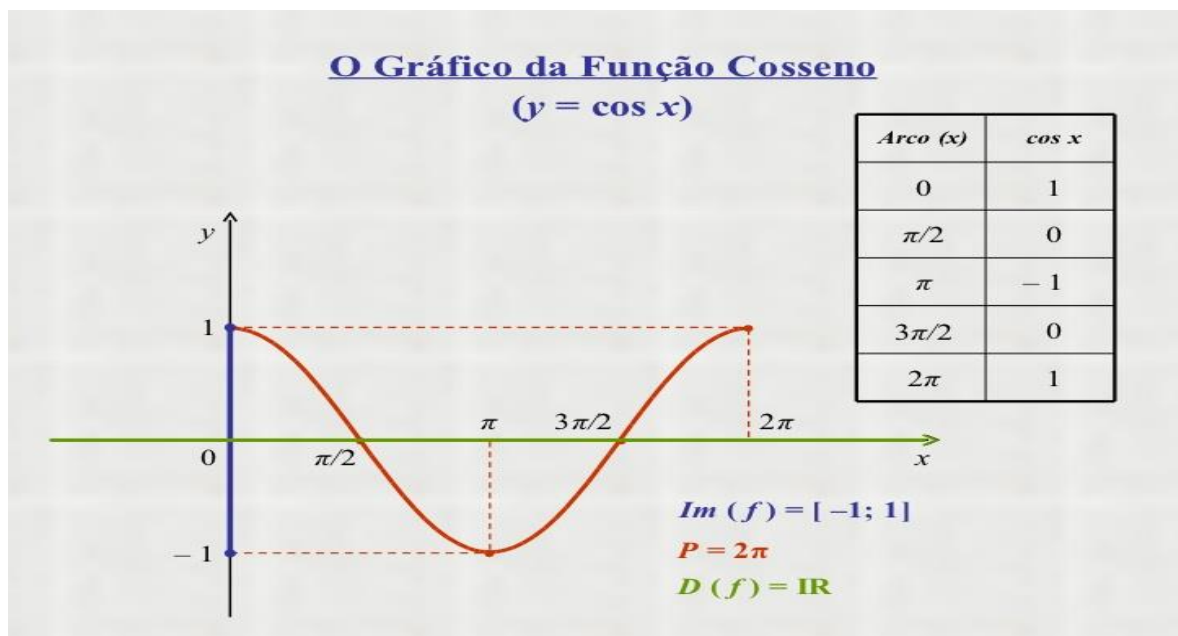
A função **cosseno** será definida como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde: $f(x) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$, e seu gráfico é classificado de **cosenóide**.

Representação da tabela e do gráfico, de uma função cosseno considerando os valores pertencentes aos eixos x e y.

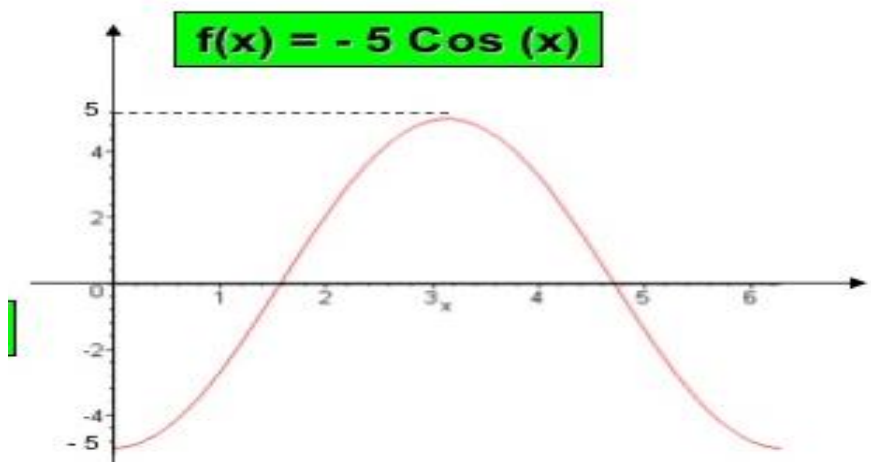
X	$f(x) = \cos x$	f(x)
0°	$f(0) = \cos 0^\circ = 1$	1
90° ou $\frac{\pi}{2}$	$f(1) = \cos 90^\circ = 0$	0
180° ou π	$f(1) = \cos 180^\circ = -1$	-1
270° ou $\frac{3\pi}{2}$	$f(1) = \cos 270^\circ = 0$	0
360° ou 2π	$f(1) = \cos 360^\circ = 1$	1

Imagem: : A imagem da função cosseno é no max 1 e no min -1, ou seja, é o intervalo $[-1, 1]$.

Período: O período da função cosseno é 2π .



Exemplo de função cosseno e seu gráfico de cossenoide.



Função tangente

A função tangente é definida como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \text{tg } x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Representação da tabela e do gráfico, de uma função tangente considerando os valores pertencentes aos eixos x e y.

X	$f(x)=\text{tag } x$	$f(x)$
0°	$f(0) = \text{tag } 0^\circ = 0$	1
90° ou $\frac{\pi}{2}$	$f(1) = \text{tag } 90^\circ = \nexists$	$\nexists$
180° ou π	$f(1) = \text{tag } 180^\circ = 0$	-1
270° ou $\frac{3\pi}{2}$	$f(1) = \text{tag } 270^\circ = \nexists$	$\nexists$
360° ou 2π	$f(1) = \text{tag } 360^\circ = 0$	1

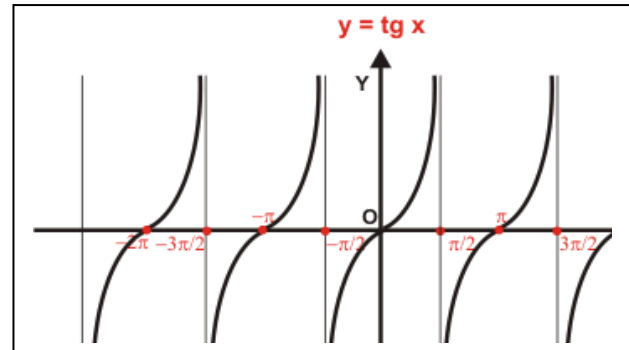
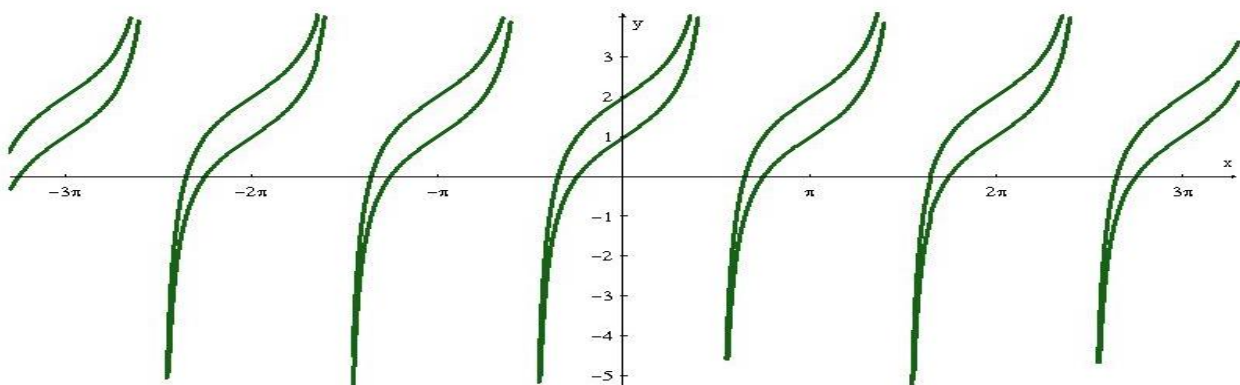


Imagem: A imagem da função tangente é o próprio conjunto dos reais $\mathbb{R}$, ou seja, $\text{Im} = \mathbb{R}$.

Período: O período da função tangente é π .

Exemplos de funções tangentes.

Gráfico da função $f(x) = 2 + \text{tg } x$:



7. Atividades Propostas

1) Na função $f(x) = 2^x$, o valor de $f(x)$, quando $x = 6$, será:

- (a) 12
- (b) 512
- (c) 128
- (d) 1024
- (e) 64

2) A expressão $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t , em anos. Se em 1990 essa cidade tinha $K = 300.000$ habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, ela possuía no ano 2000? (Adote $\sqrt{2} \cong 1,4$)

- (a) 300.000
- (b) 420.000
- (c) 720.000
- (d) 120.000
- (e) 140.000

3) Qual o valor de X , sendo $X = -\frac{3\pi}{6}$ em graus:

- (a) 60°
- (b) 180°
- (c) 90°
- (d) 120°
- (e) 30°

4) Sendo $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \tan 45^\circ = A$, então A , valerá:

- (a) 0
- (b) 1

- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) -1
- (e) 2

5) Em qual quadrante encontra-se o ângulo 225° ?

- (a) 1º quadrante
- (b) 2º quadrante
- (c) 3º quadrante
- (d) 4º quadrante
- (e) eixo x

8. Resumo

Nestas Orientações de Estudos, foram apresentados os seguintes conteúdos: ciclo trigonométrico, funções exponenciais, construções de gráficos exponenciais, funções seno, cosseno e tangente, estudo dos sinais no ciclo trigonométrico e construção de gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Considerações Finais

Estas Orientações de Estudos não esgotam a abordagem do conteúdo, por isso sinalizamos a seguir materiais que podem auxiliá-los a compreender melhor cada item abordado. Acreditamos que com as videoaulas e os podcasts, o que estudamos ficará mais nítido para todos.

Esperamos que tenham tido uma leitura prazerosa dos conteúdos abordados.

9. Referências Audiovisuais.

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-trig-ratios-intro/v/basic-trigonometry>

<https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/trig-functions/unit-circle-definition-of-trig-functions-alg2/v/matching-ratios-trig-functions>

<https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/trig-functions/unit-circle-definition-of-trig-functions-alg2/v/unit-circle-definition-of-trig-functions-1>

10 .Referências Bibliográficas

Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto; Almeida, de Nilze - Matemática: Ciências e Aplicações: Ensino Médio, Volume 1 –9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

Leonardo, Fabio Martins de; Silva, Willian Raphael. Conexões com a matemática. 2ª edição. São Paulo. Moderna, 2017.

Souza, Joamir robrto de; Garcia. Jacqueline da Silva Ribeiro. # Contato Matemática: coleção. 1ª edição. São Paulo. FTD, 2016.

Facchini, Walter. Matemática para a escola de hoje: Livro único. 1ª ed. São Paulo. FTD, 2006.