

ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA

2

2^a
SÉRIE



Ensino Médio

Secretaria de
Educação



GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO



/SeeducRJ



/seeducrj



/seeducrio



Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação

Comte Bittencourt
Secretário de Estado de Educação

Andrea Marinho de Souza Franco
Subsecretária de Gestão de Ensino

Elizângela Lima
Superintendente Pedagógica

Coordenadoria de Área de conhecimento
Maria Claudia Chantre

Assistentes

Carla Lopes
Fabiano Farias de Souza
Roberto Farias
Verônica Nunes

Texto e conteúdo

Prof. Evaldo de Lima
C.E. Pastor Miranda Pinto
Prof.^a Fátima Cristina R. dos S. Magalhães
C.E. João Proença
Prof. Herivelto Nunes Paiva
C.E. Pandiá Calógeras
Prof. Jonas da Conceição Ricardo
CIEP 394 Cândido Augusto Ribeiro Neto
Prof. Lucas José Ribeiro
C.E. Professor José Accioli
Prof. Luciano Silva Terencio de Jesus
CEJA Petrópolis
Prof.^a Mônica de Siqueira da Cunha
C.E. Pastor Miranda Pinto

Capa

Luciano Cunha

Revisão de texto

Prof^a Alexandra de Sant Anna Amancio Pereira

Prof^a Andreia Cristina Jacurú Belletti

Prof^a Andreza Amorim de Oliveira Pacheco.

Prof^a Cristiane Póvoa Lessa

Prof^a Deolinda da Paz Gadelha

Prof^a Elizabete Costa Malheiros

Prof^a Ester Nunes da Silva Dutra

Prof^a Isabel Cristina Alves de Castro Guidão

Prof José Luiz Barbosa

Prof^a Karla Menezes Lopes Niels

Prof^a Kassia Fernandes da Cunha

Prof^a Leila Regina Medeiros Bartolini Silva

Prof^a Lidice Magna Itapeassú Borges

Prof^a Luize de Menezes Fernandes

Prof Mário Matias de Andrade Júnior

Paulo Roberto Ferrari Freitas

Prof^a Rosani Santos Rosa

Prof^a Saionara Teles De Menezes Alves

Prof Sammy Cardoso Dias

Prof Thiago Serpa Gomes da Rocha

Esse documento é uma curadoria de materiais que estão disponíveis na internet, somados à experiência autoral dos professores, sob a intenção de sistematizar conteúdos na forma de uma orientação de estudos.



Matemática – Orientação de Estudos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	6
2 Aula 1 - Progressão Aritmética(PA)	6
2.1 Termo Geral de uma PA	7
3 Aula 2 - Soma dos termos Finitos da PA	8
4 Aula 3 - Progressão Geométrica (PG)	10
4.1 Termo Geral de uma PG	11
5 Aula 4 - Matemática Financeira	12
6 Aula 5 - Juros Simples	14
6.1 Juros Compostos	16
7 Atividades	18
8 Resumo	19
9 Referências Audiovisuais	20
10 Referências Bibliográficas	20



DISCIPLINA: Matemática.

ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS para Matemática
2º Bimestre de 2020 - 2ª série do Ensino Médio

META:

Apresentar os conceitos das progressões, aritmética e geométrica;
apresentar os conceitos envolvidos na matemática financeira.

OBJETIVOS:

Ao final destas Orientações de Estudos, você deverá ser capaz de:

1. Reconhecer e Diferenciar as Progressões
2. Saber calcular os termos de uma Progressão
3. Calcular a soma de uma Progressão Aritmética
4. Diferenciar Juros simples e Juros composto.



INTRODUÇÃO

Já repararam como algumas coisas na natureza se reproduzem? Algumas de forma mais lenta, outras, mais rápidas. Quando tratamos do assunto “progressões” estamos abordando algo que tanto pode crescer quanto diminuir dentro de uma sequência, e é sobre isso que falaremos nesta nossa aula. Vamos lá!

2- Aula 1 - Progressão Aritmética(PA)

Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a um número fixo, chamado razão da progressão e representado pela letra r .

Dessa forma, a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ é uma progressão aritmética quando:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \Rightarrow a_2 - a_1 = r \\ a_3 &= a_2 + r \Rightarrow a_3 - a_2 = r \\ a_4 &= a_3 + r \Rightarrow a_4 - a_3 = r \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} + r \Rightarrow a_n - a_{n-1} = r \end{aligned}$$

Se a razão de uma progressão aritmética é a quantidade que acrescentamos a cada termo para obter o próximo, podemos dizer que ela é igual à diferença entre qualquer termo, a partir do segundo, e o anterior.

Obs.:

- a) Se a razão de uma P. A for positiva a P. A é crescente.
- b) Se a razão de uma P. A for negativa a P. A é decrescente.
- c) Se a razão de uma P. A for nula a P. A. é constante.

2.1 -Termo Geral de uma PA

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$. Cada um de seus termos, a partir do 2º termo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 + 0r \\a_2 &= a_1 + 1r \\a_3 &= a_1 + 2r \\a_4 &= a_1 + 3r \\&\dots\end{aligned}$$

A partir desses casos particulares, podemos induzir que o termo de ordem n é igual ao primeiro termo adicionado a_{n-1} vezes a razão r . Logo:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Atividades Resolvidas

1-Suponha que o primeiro termo de uma PA seja 4 e sua razão seja 5. Como determinar os 4 primeiros termos dessa PA?

Solução:

$$a_1 = 4 \text{ e } r=5,$$

$$a_2 = a_1 + r = 4+5 =9$$

$$a_3 = a_1 + 2r = 4+(2 \times 5) = 14$$

$$a_4 = a_1 + 3r = 4 + (3 \times 5) = 19$$

Logo, a PA é (4,9,14,19)

2- Por exemplo, em uma PA, cujo 1º termo é 5 e razão 2, qual será seu décimo termo?

Solução:

$$a_{10} = a_1 + (10-1).r$$

$$a_{10} = a_1 + 9r$$

$$a_{10} = 5 + 9 \times 2$$

$$a_{10} = 23$$

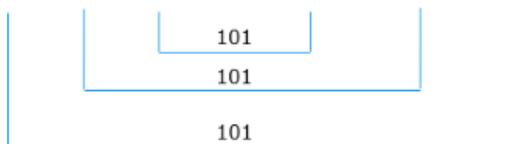
3- Aula 2 - Soma dos termos Finitos da PA

Você já pensou em somar os números de 1 a 100, para saber o resultado ? Bem a chance de no meio do caminho, ainda que seja utilizado uma calculadora haja algum erro e você venha errar essa soma é grande., pois teríamos que fazer : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$, será que não existe um jeito mais fácil ?

A história da matemática nos conta que um professor pediu a um aluno, ainda pequeno, que ele efetuasse esse mesmo tipo de cálculo, e esse aluno prontamente fez o cálculo, seu nome era Carl Friedrich Gauss, mais conhecido como Gauss, que veio a se tornar um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Ele percebeu que a soma dos termos com a mesma distância era sempre 101, como havia 50 termos ele multiplicou $50 \times 101 = 5050$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$



https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

De uma maneira, mas formal, o que Gauss fez foi, somar o primeiro termo com o último, multiplicar pela quantidade de termos e dividir por 2, pois a cada soma ele utilizava dois valores, transformando isso em uma linguagem algébrica temos a fórmula da soma da PA finita, que representamos abaixo.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Sendo:

- S_n = Soma dos n primeiros termos da PA
- a_1 = Primeiro termo da PA
- a_n = Último termo da PA
- n = Quantidade de termos

Atividades Resolvidas

1: Encontre a soma de todos os números pares de 1 até 100.

Solução: De 1 até 100, existem 100 números, sendo que metade deles são pares. Logo, a quantidade de termos pares é 50. Observando o cálculo abaixo, temos:

$$S_n = ?$$

$$a_1 = 2$$

$$a_n = 100$$

$$n = 50$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{100} = \frac{(2 + 100) \cdot 50}{2}$$

$$S_{100} = \frac{102 \cdot 50}{2}$$
$$S_{100} = \frac{5100}{2} = 2550$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Portanto, a soma de todos os números pares de 1 até 100 é 2550.

2: Qual é a soma dos números ímpares entre 10 e 1000?

Solução:

Observe que o primeiro número ímpar, após o numeral 10, é o 11; e, o último número ímpar, antes de 1000, é 999. Portanto, são 495 números pares e ímpares de 11 a 1000 e, portanto, 495 números ímpares.

Substituindo os dados na fórmula usada para soma dos termos de uma PA, teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{100} = \frac{(11 + 999) \cdot 495}{2}$$

$$S_{100} = \frac{1010 \cdot 495}{2}$$
$$S_{100} = \frac{499950}{2} = 249975$$

A soma dos números ímpares que vão de 10 a 1000 é igual a 249975.

4- Aula 3 - Progressão Geométrica (PG)

Progressão Geométrica é uma sequência de números não nulos, em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado razão da progressão, representado pela letra q .

A representação matemática de uma progressão geométrica é:
($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$).., onde:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

Numa PG, a razão q é igual ao quociente entre qualquer termo a partir do segundo e o anterior, ou seja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Obs.:

- a) se a razão for positiva a P.G. é crescente.
- b) se a razão menos que 1 e maior que zero ($0 < q < 1$) a P.G. é decrescente.
- c) Se a razão for negativa a P.G é alternante.
- d) Se a razão for igual a 1 a P.G é constante.

4.1-Termo Geral de uma PG

A fórmula do termo geral de uma PG, nos permitirá encontrar qualquer termo da progressão.

Seja a PG: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Usando a definição de PG, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \Rightarrow a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q \Rightarrow a_1 \cdot q^3 \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Desta forma, o termo geral de uma PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Atividades Resolvidas

1- Determine o 5º termo de uma **PG** sabendo que $a_1 = 3$ e $q = 4$.

Solução: De acordo com o enunciado temos que: $a_1 = 3$, $q = 4$ e $n = 5$

$$a_5 = 3 \times 4^{(5-1)}$$

$$a_5 = 3 \times 4^4$$

$$a_5 = 3 \times 256$$

$$a_5 = 768$$

Portanto, o quinto termo da PG é 768.

2: Qual é o décimo termo da PG (1, 2, 4, 8...)?

Solução: Substituindo as informações na fórmula do termo geral da PG, teremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 1 \cdot 2^{10-1}$$

$$a_{10} = 1 \cdot 2^9$$

$$a_{10} = 512$$

5. Aula 4 - Matemática Financeira

A matemática financeira é utilizada, por exemplo, quando efetuamos uma compra. Normalmente, o vendedor pergunta se levará o produto à vista ou se vai parcelar. Em geral, se o pagamento for à vista, o cliente pergunta sobre a possibilidade de um **desconto** sob o valor do produto; ou quando opta em realizar a compra em parcelas, é informado ao cliente sobre uma **taxa de juros** que é cobrada ao longo do tempo.

Um exemplo comum no dia a dia é o chamado **cheque especial**. Ao abrir uma conta em determinado banco, é oferecido um dinheiro “extra”, para emergências. Entretanto, ao usar esse limite, ou parte dele, é cobrada, além do dinheiro pego, uma taxa a ser paga posteriormente. Essa taxa é chamada de juros.

O Juro é um valor adicional que se paga pelo empréstimo de uma quantia durante determinado período. Em outras palavras, é o “aluguel” que se paga pelo empréstimo contraído durante certo tempo. É representado pelo símbolo J.

Termos importantes:

CAPITAL: valor monetário disponível para empréstimo ou valor principal. É denotado pelo símbolo C.

TAXA DE JUROS: valor expresso na forma percentual que será utilizado para calcular os juros. É denotado pelo símbolo i.

PERÍODO: espaço de tempo em que o capital ficou aplicado ou emprestado. É denotado pelo símbolo t. Atenção aos períodos e suas siglas:

MONTANTE: capital final, é o resultado da adição entre o capital e o juro. É denotado pelo símbolo M.

Atividades resolvidas

1: Um produto custava 35 reais e sofreu um acréscimo de 30%. Determine o novo valor deste produto.

Solução: Devemos calcular primeiro 30% do valor inicial, nesse caso, 35. Assim: **35 + 30% de 35.**

$$35 + \frac{30}{100} \times 35$$

$$35 + 0,3 \times 35$$

$$35 + 10,5$$

$$45,5$$

Portanto, o novo produto custará R\$45,50.

Exemplo 2: Um produto custa 60 reais e, se comprado à vista, possui um desconto de 30%. Determine o novo valor deste produto.

Solução:

$$60 - + \frac{30}{100} \times 60$$

$$60 + 0,3 \times 60$$

$$60 + 18$$

$$42$$

Assim, se o produto for comprado à vista, sairá por R\$42,00.

6- Aula 5- Juros Simples

A ideia dos juros simples é que a taxa de acréscimo é **calculada em um intervalo de tempo**. Podemos calcular os juros simples de determinado capital C, aplicado à determinada taxa a regime de juros simples (i), em um determinado período t, pela **fórmula**:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

O valor pago ao final dessa aplicação deve ser dado pelo dinheiro aplicado mais o valor dos juros e recebe o nome de montante (M). O montante é dado pela expressão:

$$M = C (1 + it)$$

Atividades Resolvidas

1: Marta deseja aplicar R\$ 6000 em uma empresa com lucro de 20% ao ano sob regime de juros simples. O contrato feito por Marta afirma que ela só pode tirar o dinheiro após seis meses. Determine qual foi o rendimento de seu dinheiro no final desse período.

Solução: Observe que o capital é igual a 6000, logo, temos que $C = 6000$. A taxa de juros é de 20% ao ano, e o dinheiro ficará aplicado durante seis meses. Observe que a taxa foi dada ao ano, e a do tempo, em meses, e sabemos que a unidade de medida de ambas devem ser a mesma.

Sabemos que a taxa é de 20% ao ano, como um ano tem 12 meses, logo, a taxa mensal será de:

$$20\% : 12$$

$$1,66\% \text{ ao mês}$$

$$0,016 \text{ ao mês}$$

Substituindo esses dados na fórmula, temos que:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 6000 \cdot 0,016 \cdot 6$$

$$J = 96 \cdot 6$$

$$J = 576 \text{ reais}$$

Portanto, o valor a ser retirado no fim dos seis meses é de 576 reais, e o montante é de:

$$M = 6000 + 576$$

$$M = 6576 \text{ reais}$$

Obs.: A única preocupação que devemos ter é com as **unidades de medida de taxa e tempo que** devem estar sempre em unidades iguais.

2: Quanto rendeu a quantia de R\$ 1200, aplicado a juros simples, com a taxa de 2% ao mês, no final de 1 ano e 3 meses?

Solução:

$$C = 1200$$

$$i = 2\% \text{ ao mês} = 0,02$$

$t = 1 \text{ ano e } 3 \text{ meses} = 15 \text{ meses}$ (tem que transformar em meses para ficar na mesma unidade de tempo da taxa de juros).

$$J = C \cdot i \cdot t = 1200 \cdot 0,02 \cdot 15 = 360$$

Assim, o rendimento no final do período será de **R\$ 360**.

6.1- Juros Compostos

Nos juros compostos, **a taxa é sempre calculada em cima do capital do mês anterior**, isso faz com que os juros aumentem de maneira exponencial seu valor. A **fórmula** para calcular os juros no sistema de amortização é dada por:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Em que **M** é o montante acumulado, **C** é o valor do capital inicial, **i** é a taxa de juros dada em porcentagem, e **t** é o período no qual o capital ficou aplicado no sistema.

Atividades Resolvidas

1: Calcule o valor do montante que Marta recolheria ao final dos seis meses ao aplicar seus 6000 reais sob taxa de juros de 20% ao ano no regime de juros compostos.

(Dado: $1,2^{0,5} \approx 1,095$)

Solução:

$$C = 6000$$

$$i = 0,2 \text{ a.a}$$

$$t = 0,5 \text{ anos}$$

Substituindo os dados na fórmula de juros compostos, temos que:

$$M = 6000 \cdot (1 + 0,2)^{0,5}$$

$$M = 6000 \cdot (1,2)^{0,5}$$

$$M = 6000 \cdot 1,095$$

M = 6572,67 reais

2: Lúcia emprestou 500 reais para sua amiga Márcia mediante uma taxa de 4% ao mês, que por sua vez, se comprometeu em pagar a dívida num período de 3 meses. Calcule o valor que Márcia no final pagará para a Lúcia.

Solução:

Primeiro temos que transformar a taxa de juros para número decimal, dividindo o valor dado por 100. Depois vamos calcular o valor da taxa de juros sobre o capital (principal) durante o período de 1 mês:

Logo:

$$J = 0,04 \cdot 500 = 20$$

Portanto, o valor dos juros em 1 mês será de R\$20.

Se a Márcia ficou de pagar sua dívida em 3 meses, basta calcular o valor dos juros referentes a 1 mês pelo período, ou seja R\$20 . 3 meses = R\$60. No total, ela pagará um valor de **R\$560,00**.

Outra maneira de calcular o valor total que Márcia pagará a amiga é aplicando a fórmula do montante (soma dos juros ao valor principal):

Logo,

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$M = 500 \cdot (1 + 0,04 \cdot 3)$$

$$M = 500 \cdot 1,12$$

$$\mathbf{M = R\$560,00}$$

7. Atividades

1- O centésimo número natural par não negativo é:

- a) 200
- b) 210
- c) 198
- d) 196
- e) 194

2- Uma PA de 7 termos tem o primeiro termo igual a 2 e a razão igual a 3, qual é o 7º termo dessa PA ?

- a) 20
- b) 22
- c) 24
- d) 27
- e) 30

3- Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. O primeiro termo dessa PG é

- a) 1
- b) 2
- c) 3

- d) 4
- e) 6

4- Uma pessoa aplicou o capital de R\$ 1.200,00 a uma taxa de 2% ao mês durante 14 meses a juros simples. Qual foi os juros produzido durante o período ?

- a) R\$ 336,00
- b) R\$ 346,00
- c) R\$ 340,00
- d)R\$ 436,00
- e) R\$ 500,00

5- Um investidor aplicou a quantia de R\$ 500,00 em um fundo de investimento que opera no regime de juros simples. Após 6 meses o investidor verificou que o montante era de R\$ 560,00. Qual a taxa de juros desse fundo de investimento?

- a) 2%
- b) 3%
- c) 4%
- d) 5%
- e) 6%

8.Resumo

Nesta orientação de estudos foram verificados conceitos sobre progressões e aplicação de juros, no regime de simples e composto. Foi possível a verificação da diferença existente entre os conceitos, seja quando falamos das progressões, seja da modalidade de juros aplicado. Fazendo uma ponte entre progressões e matemática financeira podemos dizer que a progressão aritmética está para os juros simples, assim como a progressão geométrica está para os juros composto.

9. Referências Audiovisuais

Progressões: encurtador.com.br/efCPZ

Juros : encurtador.com.br/pgyAC

Quizz PA e PG: encurtador.com.br/huAH4

10. Referências Bibliográficas

ÁVILA, R. **Teoria e Questões de Matemática**, 1ª ed. Rio de Janeiro: XYZ, 2014

ELON, L.L *et al.*: **A Matemática do Ensino Médio**, 5ª ed V. 02- Rio de Janeiro: SBM, 2004

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática, Ciências e Aplicações, Vol. 2**; 6ª edição. São Paulo; Saraiva, 2017.

ÁVILA, R. **Teoria e Questões de Matemática**, 1ª ed. Rio de Janeiro: XYZ 2014