ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS DE

MATEMÁTICA

3

3ª SÉRIE

Ensino Médio

Secretaria de Educação

GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO

/SeeducRJ /seeducrj /seeducrio

Secretaria de
Educação

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação

Comte Bittencourt
Secretário de Estado de Educação

Andrea Marinho de Souza Franco
Subsecretária de Gestão de Ensino

Elizângela Lima
Superintendente Pedagógica

Maria Claudia Chantre
Coordenadoria de Áreas de conhecimento

Assistentes
Carla Lopes
Cátia Batista
Fabiano Farias de Souza
Roberto Farias
Verônica Nunes

Texto e conteúdo

Prof.Evaldo de Lima
C.E. Pastor Miranda Pinto
Prof.ª Fátima Cristina R. dos S. Magalhães
C.E. João Proença
Prof. Herivelto Nunes Paiva
C.E. Pandiá Calógeras
Prof. Jonas da Conceição Ricardo
CIEP 394 Cândido Augusto Ribeiro Neto
Prof. Lucas José Ribeiro
C.E. Professor José Accioli
Prof. Luciano Silva Terencio de Jesus
CEJA Petrópolis
Prof.ª Mônica de Siqueira da Cunha
C.E. Pastor Miranda Pinto

Capa
Luciano Cunha

Revisão de texto

Prof ª Andreia Cristina Jacurú Belletti

Prof ª Andreza Amorim de Oliveira Pacheco.

Prof ª Cristiane Póvoa Lessa

Prof ª Cristiane Ramos da Costa

Prof ª Deolinda da Paz Gadelha

Prof ª Elizabete Costa Malheiros

Prof ª Karla Menezes Lopes Niels

Prof ª Kassia Fernandes da Cunha

Prof Marcos Giacometti

Prof Mário Matias de Andrade Júnior

Prof Paulo Roberto Ferrari Freitas

Prof ª Regina Alves Simões

Prof. Sammy Cardozo Dias

Prof Thiago Serpa Gomes da Rocha

Esse documento é uma curadoria de materiais que estão disponíveis na internet, somados à experiência autoral dos professores, sob a intenção de sistematizar conteúdos na forma de uma orientação de estudos

Secretaria de
Educação

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Matemática – Orientações de Estudos

SUMÁRIO

Secretaria de
Educação

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS para Matemática

3º Bimestre de 2020 - 3ª série do Ensino Médio

META:

Apresentar os Conceitos dos Números Complexos, assim como Conceitos de Distância entre dois Pontos e Equação da Reta (Geral e Reduzida).

OBJETIVOS:

Ao final destas Orientações de Estudos, você deverá ser capaz de:

1. Reconhecer um Número Complexo.
2. Calcular a Potência de um Número Complexo
3. Determinar a Distância entre dois Pontos
4. Escrever as equações da reta na forma geral e reduzida

INTRODUÇÃO

Durante muito tempo na nossa vida escolar ouvíamos professores dizerem que: “ *não existe raiz de índice par de números negativos*” e isso implicava diretamente quando tínhamos que resolver uma equação do 2° grau do tipo: $4x^2 - 4x + 2$, pois ao desenvolvermos essa equação, encontrávamos Δ = - 16; e isso fazia com que a raiz da equação, que possui um índice par, fosse um número negativo.

O impasse para resolução desse problema começou a ser resolvido quando Girolamo Cardano (1501-1576) começou a estudar os números complexos passando por René Descartes (1596 – 1650) e culminando com a formalização dos números complexos Friedrich Gauss (1777-1855).

A aplicação dos números complexos vai muito além da resolução de uma equação do 2º grau onde o delta é negativo, temos sua aplicação, por exemplo, na Engenharia Elétrica principalmente em circuitos elétricos, e é um pouco desse conjunto que iremos falar nesta aula.

2- Aula 1- Números Complexos e a sua Representação Algébrica

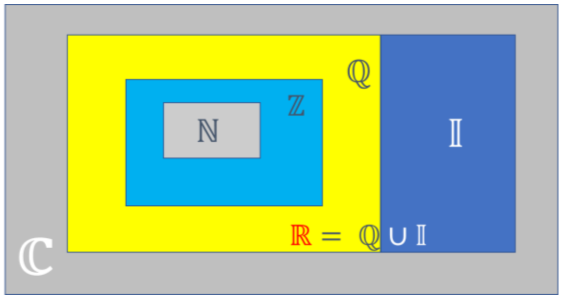
Chama-se Conjuntos dos Números Complexos o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais, nos quais os valores satisfazem as seguintes propriedades:

- Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ e \ b = d$
- Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

- Subtração: $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$
- Multiplicação: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Assim, $z\in\mathbb{C}\Rightarrow z=(a,b)$ em que $a\in\mathbb{R}\ e\ b\in\ \mathbb{R}$

Podemos representar o conjunto dos números complexos conforme o esquema apresentado abaixo .



Com isso podemos observar que todo número real é um número complexo, porém nem todos os números complexos são um número real.

A Unidade Imaginária – i

Na introdução desta aula, apresentamos uma equação do segundo grau, $4x^2-4x+2=0$, onde todos conseguimos exprimir suas raízes por meio da fórmula de Bháskara, sendo assim ao resolvermos temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot4\cdot2$$

$$\Delta=16-32=-16$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{-16}}{2\cdot4}$$

Com isso cairemos no problema da raiz quadrada de radicando negativo. Com o estudo dos números complexos convencionou-se, para resolvermos problemas como o descrito acima, a utilização de um valor, chamado ***unidade imaginária***, essa unidade é utilizada para tornar possível resoluções de casos como o apresentado.

Sendo assim, temos que a ***raiz quadrada de -1*** é igual a ***unidade imaginária i***, consequentemente o valor de ***i ao quadrado*** é igual a ***-1***:

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1}$$

Utilizando a unidade imaginária para a resolução da equação acima teremos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4}$$

O que nos dá:

$$x' = \frac{4+4\sqrt{-1}}{8} = \frac{4+4i}{8} = 1/2 + i/2 \qquad \text{e} \qquad x'' = \frac{4-4\sqrt{-1}}{8} = \frac{4-8i}{2} = 1/2 - \ i/2$$

Repare que tanto no x' quanto x'' foi feita a substituição do $\sqrt{-1}$= i, (unidade imaginária) pois só assim foi possível resolver a equação.

A Forma Algébrica do Número Complexo

Tomando como o base o item anterior, quando resolvemos a equação $4x^2 - 4x + 2 = 0$, tivemos como resposta: $x' = 1/2 + i/2$ e $x'' = 1/2 - \ i/2$? Isso aconteceu devido a maneira como é representada a forma algébrica dos números complexos.

$$\boxed{z = a + bi}$$

- *a* é chamado de parte real de Z indicando-se por *a* = Re (z)
- *b é* chamado de parte imaginária de Z onde indicamos por b = Im (z)

Se tivermos: *b* = 0 teremos z = *a*, sendo assim teremos um número real com Im (z) = 0. Porém, se *a* = 0 e z = *b*i dizemos que z é um imaginário puro com Re (z) = 0.

Atividades Resolvidas

Exemplo 1: O número complexo (2 + 4i) tem Re(z) = 2 e Im(z) = 4.

Exemplo 2: O número complexo (3 i) tem Re(z) = 0 e Im(z) = 3.

Exemplo 3: O número complexo (- i) tem Re(z) = 0 e Im(z) = - 1,

Tanto no exemplo 2 quanto no exemplo 3, os números complexos são chamados de imaginário puro.

3- Aula 2- Operações com Números complexos na Forma Algébrica

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, retornando as definições das operações apresentadas na aula 1, podemos efetuar as operações de adição, subtração e multiplicação entre números complexos, sendo possível com mais alguns estudos operarmos também a divisão entre esses números.

Atividades resolvidas.

Dados os números complexos, na forma algébrica tais que $z_1 = (2 + 4i)$ e $z_2 = (1 - 3i)$, efetue:

a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 - z_2$
c) $z_1 \cdot z_2$

Na adição e subtração de complexos devemos operar parte real com parte real, assim como a parte imaginária com a parte imaginária; já na multiplicação devemos multiplicar cada membro entre si. Com isso temos as seguintes resoluções:

Solução da letra a:

$$(2 + 4i) + (1 - 3i) = (2 + 1 + 4i - 3i) = \mathbf{3} + \boldsymbol{i}$$

Resolução da letra b:

$$(2 + 4i) - (1 - 3i) = (2 - 1 + 4i + 3i) = \mathbf{1} + \mathbf{7}\boldsymbol{i}$$

Resolução da letra c:

$$(2 + 4i) \cdot (1 - 3i) \Longrightarrow (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-3i) + 4i \cdot 1 + 4i \cdot (-3i)) \Longrightarrow$$
$$(2 - 6i + 4i - 12i^2) \Longrightarrow 2 + 12 - 2i = \mathbf{14} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}$$

Na Letra C fizemos a substituição de $i^2 = -1$, sendo necessário, toda vez que aparecer esse valor em uma operação com números complexos fazermos essa substituição.

Conjugado de um número complexo:

Dado um número complexo $z = a + bi$ onde a e $b \in \mathbb{R}$, chamamos de conjugado de z, que representamos por $\bar{z}$, o número complexo : $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos:

a) $z = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$

b) $z = 2 - i \Rightarrow \bar{z} = 2 + i$

c) $z = 1 \Rightarrow \bar{z} = 1$

d) $z = -5i \Rightarrow \bar{z} = 5i$

Quando vamos escrever o conjugado de um número complexo, somente o valor da parte imaginária troca de sinal, por isso no exemplo "C", acima, o conjugado de 1 continuou sendo 1.

Divisão de Números Complexos:

Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di,\ z_2 \neq 0$ onde $a, b, c\ e\ d \in \mathbb{R}$, para efetuarmos a divisão de $\frac{z_1}{z_2}$, basta multiplicarmos o numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Atividades resolvidas.

1- Determine o quociente de $z_1 = 2 + i$ por $z_2 = 1 - 4i$

Solução:

Para resolvermos essa divisão basta multiplicarmos tanto o numerador quanto o denominar pelo conjugado de z_2 ou seja: $\overline{z_2} = 1 + 4i$, com isso temos :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{1 - 4i} \cdot \frac{1 + 4i}{1 + 4i} \Rightarrow \frac{8 + 12i + 2i + 3i^2}{4 - 9i^2} \Rightarrow \frac{8 - 3 + 14i}{4 + 9} \Rightarrow \frac{5 + 14i}{13} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}} + \frac{\mathbf{14}\boldsymbol{i}}{\mathbf{13}}$$

4- Aula 3 - Potência de i

Até agora estamos trabalhando somente com as transformações $i^2 = -1$, porém essa não é única forma que como se apresenta uma potência de um número imaginário *i*. vejamos agora como seria as demais variações para as potencias de $\mathrm{i}^n \text{ com } n \in \mathbf{IN}$. Vamos observar a seguir o que está acontecendo com as potencias desse número.

Potência do número Imaginário	**Resultado**
$\boldsymbol{i^0}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^1}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^2}$	$\mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^3}$	$i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^4}$	$i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = \mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^5}$	$i^4 \cdot i = 1 \cdot i = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^6}$	$i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^7}$	$i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^8}$	$i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = \mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^9}$	$i^8 \cdot i = 1 \cdot i = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^{10}}$	$i^9 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \mathbf{-1}$

Podemos observar que a cada 4 potências, há uma repetição (1, i , -1 , -i), sendo assim, quando quisermos calcular uma potência i^n, onde n seja um número natural qualquer, maior que 3, basta dividirmos a potência por 4, pois irá nos interessar somente o resto da divisão, que resultará em 0, 1 , 2 ou 3, o que resultará nas respostas como um dos valores a seguir :

Potência do número Imaginário	**Resultado**
$\boldsymbol{i^0}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^1}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^2}$	$\mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^3}$	**-*i***

Vejamos na prática esses cálculos.

Atividades resolvidas

1- Qual é o valor de i^{33} ?

Solução:

Como a potência é de grau maior que 3, vamos dividir essa potência por 4 e iremos trabalhar com o resto da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 33 & \underline{\;4\;} \\ 1 & 8 \end{array}$$

Resto da $\longrightarrow$ 1

Quando dividimos o expoente 33 por 4, temos como quociente 6 e resto 1, e para nós o que interessa é o resto da divisão, que nesse caso é 1, ou seja:

$$i^{32} = i^{1} = 1$$

2- Qual é o valor de i^{932} ?

Solução: Efetuando a divisão temos:

$$\begin{array}{r|l} 932 & \underline{\;4\;} \\ 13 & 233 \\ 12 & \\ 0 & \end{array}$$

0 $\longrightarrow$ Resto da divisão

Ao dividirmos 932 por 4 temos como quociente 233 e resto 0, ou seja :

$$i^{932} = i^{0} = 1$$

3- Qual é o valor de i^{-82} ?

Solução:

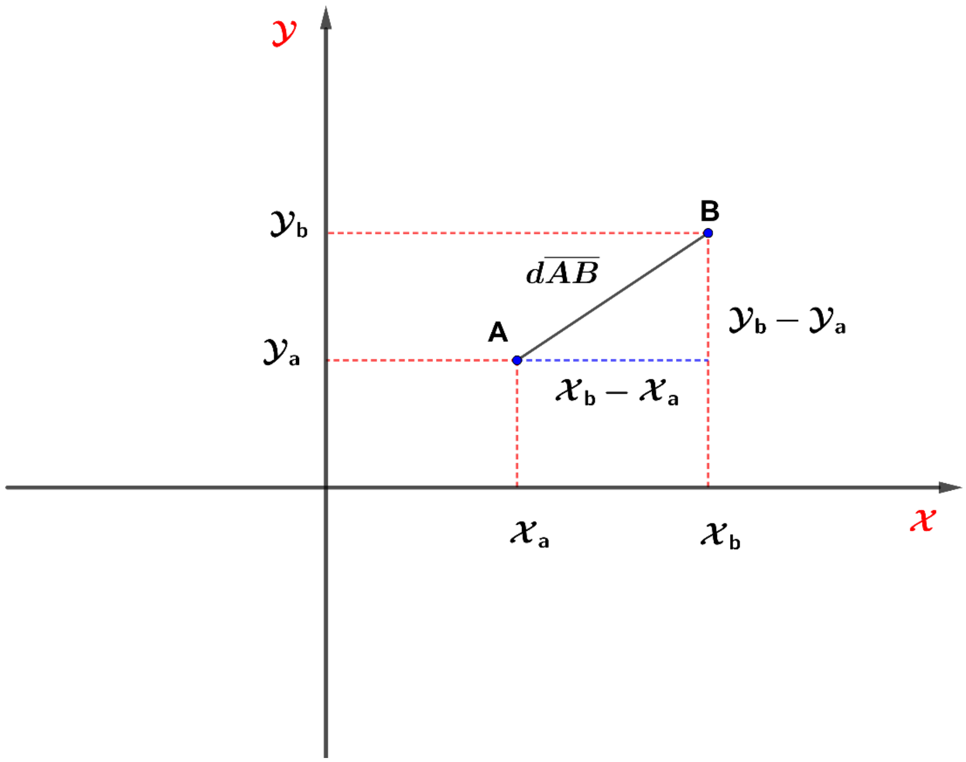
Iremos fazer da mesma forma, apenas usando um artifício matemático, ficando da seguinte forma : $(i^{82})^{-1}$, sendo somente a potência positiva a ser utilizada no processo.

$$\begin{array}{r|l} 82 & 4 \\ \hline 02 & 20 \\ 2 & \end{array} \longrightarrow \text{Resto da divisão}$$

$$(i^{82})^{-1} = (i^{2})^{-1} = (-1)^{-1} = -1$$

5- Aula 4- Distância entre dois Pontos.

Observem o gráfico abaixo a seguir



Podemos reparar que ao deslocarmos tanto da distância no eixo x quanto no eixo y, formamos um triângulo retângulo de catetos $x_b - x_a \; e \; y_b - y_a$ e hipotenusa $d\overline{AB}$, utilizando o teorema de Pitágoras para calcularmos a distância entre os pontos A e B temos:

$$d\overline{AB}^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Essa é a equação que iremos utilizar para calcular a distância entre dois pontos no plano.

Atividades resolvidas

1- Determine a distância entre os pontos A (-1, 0) e B(4, 2)

Solução:

$$d\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (2 - 0)^2}$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

2- Determine a distância entre os pontos C (0,0) e D (-1, -1)

Solução.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-1 - 0)^2}$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$d\overline{AB} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

6- Aula 5 – Equação Geral e Reduzida da Reta.

Na aula 4 estudamos a distância entre dois pontos, a menor distância entre dois pontos é uma reta, sendo assim, qual seria a equação da reta que passa por dois pontos ?

Para responder essa pergunta vamos tomar como base os pontos que fizemos uso para calcular a distância, só desta vez iremos determinar a equação geral e a reduzida dessa reta.

Temos que ter em mente que por uma reta passa uma infinidade de pontos, porém para determinarmos uma reta basta que tenhamos apenas dois pontos. Para fazer esse cálculo iremos utilizar o conceito de determinante da seguinte forma.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Essa também é a forma que determinamos se os pontos estão alinhados.

Operando o determinante temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{matrix} = 0$$

$$-(y_a \cdot x_b \cdot 1) - (x \cdot 1 \cdot y_b) - (y \cdot x_a \cdot 1) + (x \cdot y_a \cdot 1) + (y \cdot 1 \cdot y_b) + (1 \cdot x_a \cdot y_b) = 0$$

$$-y_a x_b - x y_b - x_a y + x y_a + y y_b + x_a y_b = 0$$

Fazendo uma arrumação temos :

$$(y_a - y_b)x + (y_b - y_a)y + (x_a y_b - y_a x_b) = 0$$

$$\underbrace{(y_a - y_b)}_{A} x + \underbrace{(y_b - y_a)}_{B} y + \underbrace{(x_a y_b - x_b y_a)}_{C} = 0$$

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Atividades resolvidas

1- Determine a equação geral e reduzida da reta que passa pelos pontos A (-1, 0) e B(4, 2)

Solução:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 0$$

$$0 - 2x + y + 0 + 4y - 2 = 0$$

$$-2x + 5y - 2 = 0 \text{ (1)}$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \text{ (2)}$$

A equação 1 é chamada equação geral da reta.

A equação 2 é chamada equação reduzida da reta.

2- Determine a equação geral e reduzida da reta que passa pelos pontos C (0,0) e D (-1, -1)

Solução.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$0 + x + 0 + 0 - y + 0 = 0$$

$$x - y = 0 \text{ (1)}$$

$$y = x \text{ (2)}$$

A equação 1 é chamada equação geral da reta.

A equação 2 é chamada equação reduzida da reta.

7- Atividades Propostas

1- Qual o resultado da operação $(2 + 2i) \cdot (1 - 5i)$

a) $12 - 8i$
b) $12 + 8i$
c) $-12 - 8i$
d) $12 - 10i$
e) $10 - 8i$

2- (UECE) Para os números complexos z = 3 + 4i e w = 4 – 3i, onde $i^2 = -1$, a soma $\frac{z}{w} + \frac{w}{z}$ é igual a:
a) 0
b) 2i
c) -2i
d) 1
e) -1

3- (UECE- adaptada) Se o número complexo $z = (-3 - 2i)^2 + \frac{2}{i}$ é posto na forma a + bi, onde a e b são números reais, então b - a é igual a:

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

4- (UNESP) Se z = (2 + i). (1 + i). i, então $\bar{z}$, o *conjugado* de z, será dado por

a) – 3 – i.
b) 1 – 3i.
c) 3 – i.
d) – 3 + i.
e) 3 + i.

5- (Mackenzie- SP-Adaptada) Se $i^2 = -1$, o complexo $z = \frac{i^{2003} - i}{i - 1}$ a parte real vale :

a) -1.
b) 0.

c) 1.
d) 2
e) -2

8- Resumo

Nestas orientações de estudos, apresentamos mais um conjunto numérico que vem para encerrar e responder ao questionamento sobre as raízes de índice par com radicando negativo, o conjunto dos números complexos.

Apresentamos a ideia de imaginário assim como trabalhamos as suas potências e as operações.

Ao tratarmos de geometria analítica apresentamos os conceitos de distância entre pontos bem como a representação da equação da reta de forma geral e reduzida.

Considerações Finais.

Estas Orientações de Estudos, não esgotam a abordagem do conteúdo, por isso sinalizamos a seguir materiais que podem auxiliá-los a compreender melhor cada item abordado. Acreditamos que com as videoaulas e os podcasts, o que estudamos ficará mais nítido para todos.

Esperamos que tenham tido uma leitura prazerosa dos conteúdos abordados.

9- Referências Audiovisual.

Equação da reta : https://www.geogebra.org/m/N8bCDWxb

Operações com Números Complexos : https://www.geogebra.org/m/mrcxb9fs

Vídeo: Números Complexos : https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/introduction-to-complex-numbers-algebra-2/the-complex-numbers-algebra-2/v/complex-number-intro

10- Referências Bbliográficas

IEZZI, G: Fundamentos da Matemática Elementar. V 06: Complexos, Polinômios e Equação. 8. Ed. São Paulo: Atual 2013
CARMO, M P do; MORGADO, A. C; WAGNER, E.: Trigonometria e Números/ Números Complexos- 3 ed. Rio de Janeiro: SBM 2005
ELON, L.L; et al.: A Matemática do Ensino Médio, V. 03- Rio de Janeiro: SBM 1998
IEZZI, G, et al : Matemática: Ciências e Aplicações, 3: ensino médio - 6 ed- São Paulo: