ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS DE

MATEMÁTICA

1

2ª SÉRIE

Ensino Médio

Secretaria de Educação

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação

Comte Bittencourt
Secretário de Estado de Educação

Andrea Marinho de Souza Franco
Subsecretária de Gestão de Ensino

Elizângela Lima
Superintendente Pedagógica

Coordenadoria de Áreas de conhecimento
Maria Claudia Chantre

Assistentes
Carla Lopes
Fabiano Farias de Souza
Roberto Farias
Verônica Nunes

Texto e conteúdo

Prof. Evaldo de Lima
C.E. Pastor Miranda Pinto
Prof.ª Fátima Cristina R. dos S. Magalhães
C.E. João Proença
Prof. Herivelto Nunes Paiva
C.E. Pandiá Calógeras
Prof. Jonas da Conceição Ricardo
CIEP 394 Cândido Augusto Ribeiro Neto
Prof. Lucas José Ribeiro
C.E. Professor José Accioli
Prof. Luciano Silva Terencio de Jesus
CEJA Petrópolis
Prof.ª Mônica de Siqueira da Cunha
C.E. Pastor Miranda Pinto

Capa
Luciano Cunha

Revisão de texto

Prof ª Alexandra de Sant Anna Amancio Pereira
Prof ª Andreia Cristina Jacurú Belletti
Prof ª Andreza Amorim de Oliveira Pacheco.
Prof ª Cristiane Póvoa Lessa
Prof ª Deolinda da Paz Gadelha
Prof ª Elizabete Costa Malheiros
Prof ª Ester Nunes da Silva Dutra
Prof ª Isabel Cristina Alves de Castro Guidão
Prof José Luiz Barbosa
Prof ª Karla Menezes Lopes Niels
Prof ª Kassia Fernandes da Cunha
Prof ª Leila Regina Medeiros Bartolini Silva
Prof ª Lidice Magna Itapeassú Borges
Prof ª Luize de Menezes Fernandes
Prof Mário Matias de Andrade Júnior
Paulo Roberto Ferrari Freitas
Prof ª Rosani Santos Rosa
Prof ª Saionara Teles De Menezes Alves
Prof Sammy Cardoso Dias
Prof Thiago Serpa Gomes da Rocha

Esse documento é uma curadoria de materiais que estão disponíveis na internet, somados à experiência autoral dos professores, sob a intenção de sistematizar conteúdos na forma de uma orientação de estudos.

© 2021 - Secretaria de Estado de Educação. Todos os direitos reservados.

Secretaria de Educação

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Matemática – Orientações de Estudos

1º Bimestre de 2020 - 2ª série do Ensino Médio

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	**6**
2	**Aula 1 -** Logaritmo e suas definições	**6**
3	**Aula 2** - Equações Logarítmicas	**9**
4	**Aula 3 -** Função Logarítmica	**10**
4.1	Domínio da Função logarítmica	**11**
5	**Aula 4 –** Introdução a Geometria Espacial	**13**
6	**Aula 5-** Poliedros e Corpos Redondo	**16**
6.1	Poliedros	**17**
6.2	Corpos Redondos	**19**
7	**Atividades Propostas**	**24**
8	**Resumo**	**26**
9	**Referências Audiovisuais**	**26**
10	**Referências Bibliográficas**	**26**

Secretaria de Educação

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

ORIENTAÇÕES DE ESTUDOS para Matemática

1º Bimestre de 2020 - 2ª série do Ensino Médio

META:

Compreender o logaritmo como processo inverso da equação exponencial; compreender os conceitos primitivos da geometria espacial (ponto, reta e plano), compreender a relação de Euler.

OBJETIVOS:

Ao final destas Orientações de Estudos, você deverá ser capaz de:

1- Calcular o logaritmo e aplicar na resolução de problemas significativos.
2- Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial
3- Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações
4- Utilizar a relação V+ F = A + 2 (Relação de Euler)
5- Identificar e nomear os poliedros regulares

INTRODUÇÃO

O estudo dos logaritmos tem o seu desenvolvimento entre os séculos XVI e XVII, ele nasce da necessidade de transformar cálculo complexos da multiplicação e divisão em simples adições e subtrações.

John Neper foi um matemático que desenvolveu o estudo dos logaritmos, que tema sua aplicação justificada em problemas onde não seja possível a redução das potências a mesma base.

Diante disso, a aplicação dos logaritmos são as mais variadas possíveis, sendo possível fazer uso desse conceito na astronomia, na matemática financeira ou até mesmo para calcularmos a intensidade de um terremoto, que é calculado pela escala Richter .

Além disso, iremos abordar os conceitos introdutórios da geometria espacial, como ponto, reta e plano, bem como os conceitos de poliedros e corpos redondos.

2- Aula 1 - Logaritmo e suas definições

Sejam *a* e *b* números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se de logaritmo de *b* na base *a* o expoente que se deve elevar à base de modo que a potência obtida seja igual a b.

$$log_a\, b = x \Leftrightarrow a^x = b \; log_a\, b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Destacamos os seguintes elementos:

- **a** = Base do logaritmo;
- **b** = logaritmando ou antilogaritmo
- **x** = logaritmo

Atividades Resolvidas

1- Determine o valor nas seguintes situações:

a) $log_3 27 = x$

b) $log_2 x = 5$

c) $log_{\frac{1}{5}} 125 = x$

Solução da letra a	**Solução da letra b**	**Solução da letra c**
$log_3 27 = x$	$log_2 x = 5$	$log_{\frac{1}{5}} 125 = x$
$3^x = 27$	$2^5 = x$	$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$
$3^x = 3^3$	$32 = x$	$(5^{-1})^x = 5^3$
$x = 3$		$-x = 3$
		$x = -3$

Esses exemplos foram resolvidos fazendo uso da definição dos logaritmos, decorrente da definição do logaritmo temos as seguintes consequências :

1º) O logaritmo de 1, em qualquer base, é igual a zero

$\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

2º) O logaritmo da base, qualquer que seja, é igual a 1

$\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

3º) A potência de base a e expoente $\log_a b$ é b:

$a^{\log_a b} = b$

4º) Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos, também, são iguais:

$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$

Além das propriedades provenientes da definição do logaritmo, temos também as propriedades operatórias dos logaritmos que são elas:

1ª propriedade: logaritmo de um produto

$$log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

2ª propriedade: logaritmo de um quociente

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

3ª propriedade: logaritmo de uma potência

Esta propriedade se divide em dois casos o primeiro quando a potência está no logaritmando

$$log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

O segundo caso é quando a potência está na base do logaritmo.

$$log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$

4ª propriedade: mudança de base

Se a, b e c são números reais positivos e a e c diferentes de 1, então temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Atividades Resolvidas.

1- Determine o valor dos logaritmos a seguir.

a) Calcule $\log_x 10$, sendo, $\log_x 2 = a$ = a , $\log_x 5 = b$

b) Seja $\log_x 7 = 20$ e $\log_x 5 = 5$, calcular $\log_x \left(\frac{7}{5}\right)$.

c) Como fica a conversão de $\log_3 5$ na base 2 fica:

Solução da letra a	**Solução da letra b**	**Solução da letra c**
$log_x 10$	$\log_x \left(\frac{7}{5}\right)$	$\log_3 5$
$log_x(5 \cdot 2)$	$\log_x 7 - \log_x 5$	$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$
$\log_x 5 + \log_x 2$	$20 - 5 = 15$	
$\log_x 10 = a + b$		

3. Aula 2 - Equações Logarítmicas

Para resolvermos uma equação logarítmicas, em vários casos será necessário usarmos artifícios que facilitem o entendimento da questão, vejamos alguns casos em que será preciso fazermos isso.

1° caso: São equações redutíveis a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base.

$$\boldsymbol{log_a x = log_a y}$$

Exemplo:

$$\boldsymbol{log_5(2 - x) = log_5(-2x + 7)}$$
$$\boldsymbol{\cancel{log_5}(2 - x) = \cancel{log_5}(-2x + 7)}$$

$$2 - x = -2x + 7$$

$$-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{2x} = \boldsymbol{7} - \boldsymbol{2}$$

$$x = 5$$

2° CASO: São equações redutíveis a uma igualdade entre um logaritmo e um número real.

$$\boldsymbol{log_a\, x = b \Longrightarrow x = a^b}$$

Exemplo:

$$\log_2(x^2 - 5x + 10) = 2$$

$$2^2 = (x^2 - 5x + 10)$$

$$x^2 - 5x + 10 - 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Utilizando produto e soma demos as raízes 2 e 3

4- Aula 3 - Função Logarítmica

Sejam *a* e *b* números reais positivos, com *a* ≠ 1, chamamos de função logarítmica base *a* uma função f de $\mathbb{R}_+^*$ que associa a cada x o número $\log_a x$.

$$f: f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \log_a x$$

Exemplos:

a) $\boldsymbol{f(x)} = \log_2 x$

b) $\boldsymbol{g(x)} = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $\boldsymbol{p(x)} = \ln \boldsymbol{x}$

4.1- Domínio da Função logarítmica

O domínio de uma função representa os valores de **x** onde essa função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo.

Portanto, o logaritmando deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1.

Exemplo

Determine o domínio da função f (x) = $\log_2$ (x + 7).

Solução

Para encontrar o domínio, devemos considerar que (x + 7) > 0, pela condição de existência do logaritmo. Resolvendo essa inequação, temos:

$$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$$

Assim, o domínio da função pode ser representado por:

$$D = \{x \in R / x > -7\}$$

4.2- Gráfico da Função Logarítmica

O Gráfico da função logarítmica definida por $\boldsymbol{f(x)} = \log_a x \ , (0 < a \neq 1)$ possui as seguintes características:

- Seu gráfico está todo à direita de eixo y, ou seja, os valores de x serão sempre maiores que zero
- Intercepta o eixo x no ponto de abscissa 1, pois $\log_a 1 = 0 \text{ para todo } 0 < a \neq 1)$

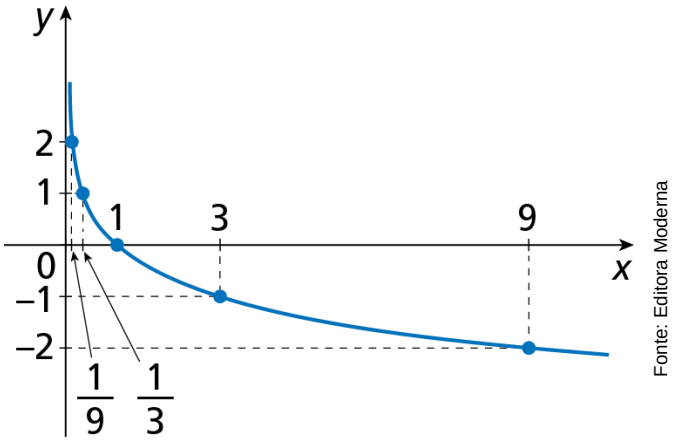
- Se a > 1 é uma função crescente e se 0 < a < 1 é uma função decrescente

- Possui simetria em relação à reta y = x (o que seria a bissetriz do quadrante ímpar) do gráfico da função g(x)= a^x

Construção do gráfico de uma função logarítmica $f(x) = \log_a x\,; 0 < a < 1$

Seja a função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	f(x)
1/9	2
1/3	1
1	0
3	-1
9	-2

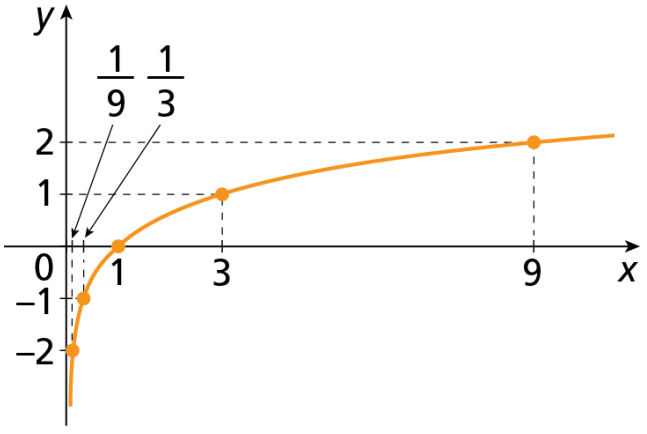


Fonte: Editora Moderna

Construção do gráfico de uma função logarítmica $f(x) = \log_a x\,; a > 0$

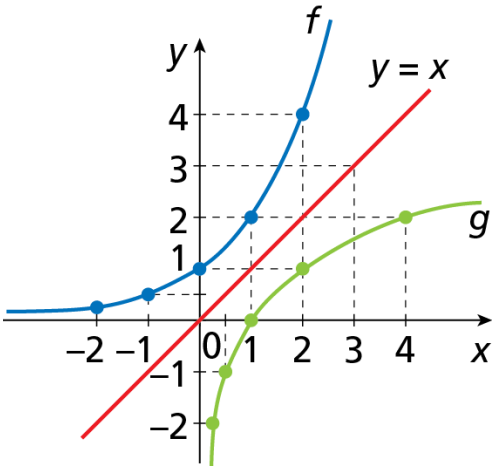
Seja a função $f(x) = \log_3 x$

x	f(x)
1/9	-2
1/3	-1
1	0
3	1
9	2



Fonte: Editora Moderna

As funções logarítmicas e funções exponencias são consideradas inversas uma da outra, havendo simetria entre os gráficos em relação à reta formada pela função y= x



Fonte: Editora Moderna

Essas Transformações gráficas da função logarítmicas podem ser vistas verificadas de forma interativa no qrcode abaixo.

5- Aula 4 – Introdução a Geometria Espacial

Na geometria espacial, são conceitos primitivos (aceitos sem necessidade de definição) os conceitos de ponto, reta e plano.

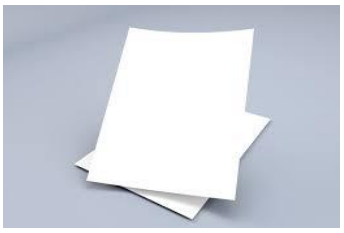
Ao nosso redor encontramos exemplos de pontos, retas e planos como um pingo de caneta numa folha é um ponto, os trilhos da linha de trem são exemplos de retas e uma folha de A4 é um plano.

Ponto

Fonte: encurtador.com.br/htIKV

Reta

Fonte: encurtador.com.br/jyPTY



Plano

Fonte: encurtador.com.br/fsvAW

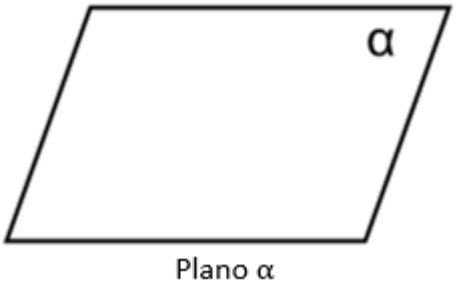
Noções Primitivas

- **pontos**: letras maiúsculas do nosso alfabeto

- **retas**: letras minúsculas do nosso alfabeto

Fonte: Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada

- **planos**: letras minúsculas do alfabeto grego



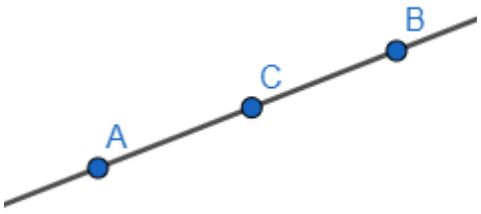
Fonte: encurtador.com.br/HJU36

Postulados fundamentais

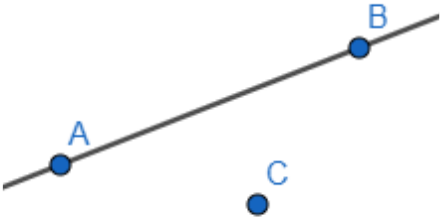
I - Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos distintos.

II - Dois pontos determinam uma única reta. Se outras retas passam por esse ponto, essas retas serão iguais.

III - Pontos colineares pertencem à mesma reta.

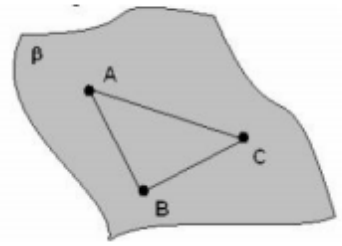


A, B e C são colineares



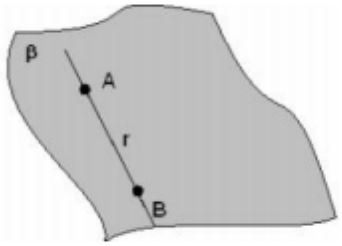
A, B e C não são colineares

IV - Três pontos determinam um único plano



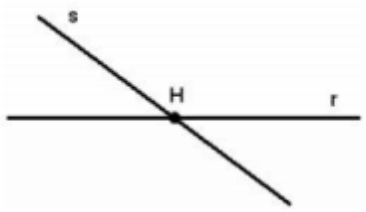
Fonte: Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada

V - Se uma reta contém dois pontos de um plano, esta reta está contida neste plano.



Fonte: Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada

VI - Duas retas são concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum.



Fonte: Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada

Observe que o ponto de encontro das retas s e r e o ponto H, logo o ponto H pertence as retas s e r

6- Aula 5- Poliedros e Corpos Redondos

Os sólidos geométricos estão muito presentes no nosso dia a dia, basta observa as embalagens de alimentos em nosso cotidiano, como por exemplo, a lata de leite pó, ou uma caixa tetrapark que pode ser usada para colocar leite ou suco.

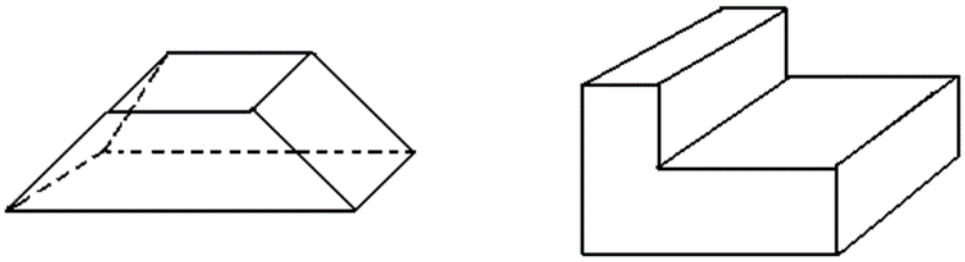
Fonte: google fotos

Como podemos perceber, na primeira embalagem, temos uma estrutura uma parte arredondada (não plana). Já na segunda embalagem, temos uma estrutura feita de faces retangulares.

6.1- Poliedros

Chamamos de *poliedro* o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum.

Exemplo:



Poliedros convexos e côncavos

Observando os poliedros acima, podemos notar que, considerando qualquer uma de suas faces, os poliedros encontram-se inteiramente no mesmo semiespaço que essa face determina. Assim, esses poliedros são denominados *convexos*.

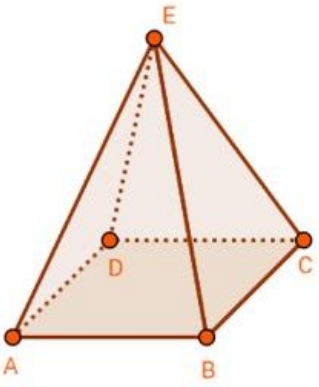
Isso não acontece no último poliedro, pois, em relação a duas de suas faces, ele não está contido apenas em um semiespaço. Portanto, ele é denominado côncavo.

Elementos de poliedros

Como elementos principais de um poliedro, podemos destacar:

- **faces:** são os polígonos que o limitam.
- **arestas:** são os lados desses polígonos.
- **vértices:** são os vértices desses polígonos.

Exemplo:



a) faces: ABCD, BEC, CED, DEA e AEB

b) arestas: AB, BC, CD, DA, DE, AE, EB e EC

c) vértices: A, B, C, D e E

Nomenclatura

Os nomes dos poliedros são dados de acordo com o seu número de faces.

Números de Faces	Nome
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

6.2- Corpos Redondos

Os corpos redondos, por sua vez, possuem superfícies curvas; logo, não possuem faces laterais. Eles também podem ser chamados de sólidos de revolução, haja vista que são formados pela rotação de uma figura plana (figura geradora) ao redor de seu eixo. São corpos redondos: o cone, a esfera e o cilindro.

Exemplos:

Fonte: google fotos

Relação de Euler

A relação criada pelo matemático suíço Leonard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e de alguns não convexos. Dessa forma, essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de indicar o número de elementos de um poliedro. A fórmula criada por Euler é a seguinte:

Em todo poliedro convexo, o número de faces, mais o número de vértices, é igual ao número de arestas, acrescido de duas unidades.

Em outras palavras, se chamarmos **F, V** e **A**, respectivamente os números de faces, vértices, é igual ao número de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo, temos que:

$$V + F = A + 2$$

Atividade resolvida

1- Um poliedro convexo tem 6 vértices e 12 arestas. Quantas faces ele tem?

Solução:

Nesse caso, temos V = 6 e A = 12. Pela relação de Euler, temos:

$V + F = A+2 \Rightarrow$

$6+ F =12+2 \Rightarrow$

$6+ F =14 \Rightarrow$

$F =14-6 \Rightarrow 8$

Temos que o número de faces e igual a 8.

2. (UF – PI) Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de faces em 18. O número de vértices desse poliedro é:

a) 10
b) 20
c) 24
d) 30
e) 32

Solução:

V + F = A + 2 (relação de Euler)

A= F+ 18

F + V = A + 2

F + V = F + 18 + 2

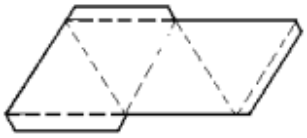
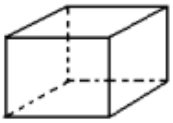
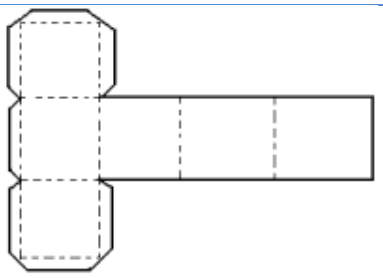
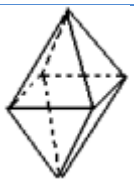
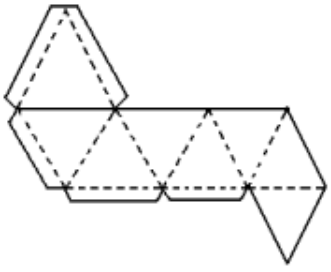
V = F - F + 18 +2

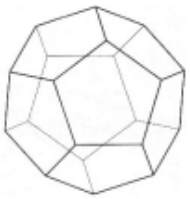
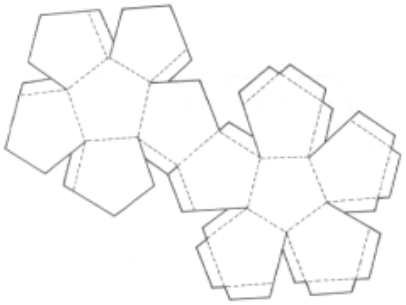
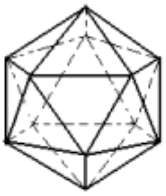
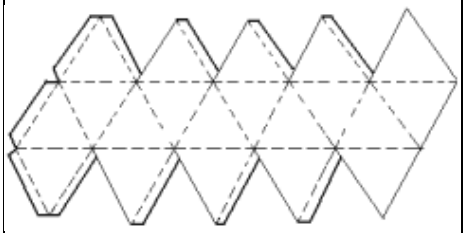
V =20 (opção B)

Poliedro Regular

Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros regulares, que são apresentados a seguir:

Poliedro	Planificação	Elementos
Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas

 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Fonte: encurtador.com.br/tP278

Atividades Resolvidas

1- (Fuvest – SP) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui:

a) 33 vértices e 22 arestas.
b) 12 vértices e 11 arestas.
c) 22 vértices e 11 arestas.
d) 11 vértices e 22 arestas.
e) 12 vértices e 22 arestas.

Solução:

V - A + F = 2

Temos que lembrar que se a pirâmide tem onze faces triangulares, a sua base é um polígono que possui onze lados e, portanto, onze arestas. Assim a pirâmide tem esses onze vértices mais o vértice da união entre as faces triangulares. Assim o número total

de faces é 12 assim como o de vértices.

F= 12

V = 12

V - A + F = 2

12 - A + 12 = 2

A = 22 arestas, V=12 (opção E)

2- Um poliedro regular possui 50 arestas e 32 vértices. Quantas faces possui esse poliedro?

Solução:

V + F = A + 2

20 + F + 30 + 2

F = 12 (Dodecaedro)

12 Faces e o poliedro é o Dodecaedro

7. Atividades Propostas

1- Utilizando a definição resolva qual o resultado de $\log_x 256 = 2$

a) 8

b) 9

c)10

d) 11

e) 16

2 - Considerando-se $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}47$, determine $\log_{10} 60$

a) 1,77
b) 0,77
c) 1,87
d) 1,97
e) 2,07

3- **(Fatec – SP)** Seja A um ponto pertencente à reta r, contida no plano α. É verdade que:
a) existe uma única reta que é perpendicular à reta r no ponto A.
b) existe uma única reta, não contida no plano α, que é paralela à reta r.
c) existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano α, que contém a reta r.
d) existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano α e que contêm a reta r.
e) existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano α e que são paralelas à reta r.

4- Um poliedro convexo tem 7 vértices e 10 arestas. Quantas faces ele tem?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

5- Um poliedro convexo tem 8 vértices e 10 arestas. Quantas faces ele tem?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 8
e) 9

8. Resumo

Nesta aula Orientação de Estudo, vimos a importância dos logaritmos e suas aplicações, também se espera que tenha sido possível aprender sobre os conceitos primitivos da geometria plana como ponto e reta, bem como suas posições no plano, assim como sobre os sólidos geométricos tem elementos tridimensionais. Aprendemos a importante relação de Euler que envolve os poliedros. E pode-se observar que há diferença entre os poliedros côncavos e convexos, assim como em suas planificações de sólidos geométricos.

9. Referências Audiovisuais

Logaritmo e a Escala Richter : encurtador.com.br/cdo05
Objetos Educacionais.
Neste link você terá uma abordagem visual da função logarítmica, sendo utilizado para facilitação do entendimento do conteúdo o software geogebra
encurtador.com.br/hnBY8
Relação entre a Função Exponencial e Função Logarítmica:
encurtador.com.br/ANQT3
Como utilizar as propriedades do logaritmo: encurtador.com.br/fhAGP

10. Referências Bibliográficas

Ávila, R. **Teoria e Questões de Matemática**, 1ª ed. Rio de Janeiro: XYZ 2014
ELON, L.L et al. **A Matemática do Ensino Médio**, 5ª ed V. 02- Rio de Janeiro: SBM 2004
Eves, H. **Introdução a História da Matemática**, Tradução H. Domingues- Campinas , SP, Editora Unicamp, 2004
IEZZI, G. et al. **Matemática, Ciências e Aplicações 2**; 6ª edição.São Paulo; Saraiva, 2017.